1 - Distribuição uniforme discreta

- X v.a. discreta com $D = \{x_1, x_2, ..., x_n\}$. Diz-se que X segue uma **distribuição uniforme** nos n pontos x_j $(j = 1,2,...,n)$ se e só se

$$f(x_j) = \frac{1}{n}, \quad j = 1,2,...,n.$$

- Cada valor x_j tem a mesma probabilidade. A função probabilidade é simétrica.
- Momentos:

$E(X) = \mu = \frac{1}{n}\sum_{j=1}^{n} x_j$	$\text{Var}(X) = \frac{1}{n}\sum_{j=1}^{n}(x_j - \mu)^2 = \frac{1}{n}\sum_{j=1}^{n} x_j^2 - \mu^2$
$E(X^k) = \frac{1}{n}\sum_{j=1}^{n} x_j^k$	$M(s) = \frac{1}{n}\sum_{j=1}^{n} e^{sx_j}$ f.g. momentos

Dois casos particulares importantes:

1. $D=\{1,2,...,n\}$ Exemplo: Resultado do lançamento de um dado perfeito $(n=6)$.

$$E(X)=\frac{n+1}{2};\quad E(X^2)=\frac{(n+1)(2n+1)}{6};\quad \text{Var}(X)=\frac{n^2-1}{12};$$

$$M(s)=E(e^{sX})=\begin{cases}\dfrac{e^s(1-e^{sn})}{n(1-e^s)} & (s\neq 0),\\ 1 & (s=0).\end{cases}$$

2. $D=\{0,1,2,...,m\}$ Exemplo: Escolha aleatória de um dos 10 dígitos $(m=9)$.

$$E(X)=m/2;\quad E(X^2)=m(2m+1)/6;\quad \text{Var}(X)=m(m+2)/12,$$

$$M(s)=\begin{cases}\dfrac{1-e^{s(m+1)}}{(1+m)(1-e^s)} & (s\neq 0),\\ 1 & (s=0).\end{cases}$$

2 – Distribuição de Bernoulli. Distribuição binomial

- **Prova de Bernoulli:** Experiência aleatória em que se observa a realização ou não de determinado acontecimento *A;*

  A realização de *A* designa-se por "sucesso" e a sua não realização por "insucesso". Define-se $P(A)=\theta$, $0<\theta<1$.

- Seja *X* a variável aleatória que caracteriza a experiência descrita. Assim,
  - Se $X=1$, o acontecimento *A* ocorre – verifica-se um "sucesso";
  - Se $X=0$, o acontecimento *A* não ocorre – verifica-se um "insucesso".

  A função probabilidade de *X* escreve-se,

$$f(x\,|\,\theta)=\begin{cases}1-\theta & (x=0)\\ \theta & (x=1)\end{cases}$$

ou, de forma mais condensada,

$$f(x\,|\,\theta)=\theta^{x}(1-\theta)^{1-x},\quad x=0,1\quad (0<\theta<1).$$

- Se a v.a. X tem função probabilidade dada por

$$f(x\,|\,\theta) = \theta^x (1-\theta)^{1-x}, \quad x = 0,1 \quad (0 < \theta < 1)$$

diz-se que X tem **distribuição de Bernoulli**. Simbolicamente, $X \sim B(1;\theta)$.

- Note-se que se definiu uma *família de distribuições*. A cada valor de θ corresponde uma distribuição concreta.

- Facilmente se verifica que:

$$E(X) = \theta; \quad E(X^2) = \theta; \quad \mathrm{Var}(X) = \theta(1-\theta); \quad \sigma = \sqrt{\theta(1-\theta)}; \quad \gamma_1 = (1-2\theta)/\sigma.$$

$$M(s) = E(e^{sX}) = (1-\theta) + \theta e^s$$

- Qual a probabilidade para que, em ***n*** **provas de Bernoulli independentes**, se obtenham x sucessos $(x = 0,1,\ldots,n)$ seja qual for a ordem em que estes são obtidos?

  Considere-se a probabilidade de x sucessos seguidos de $n-x$ insucessos, $\underbrace{A\,A\ldots A}_{x}\underbrace{\bar{A}\,\bar{A}\ldots\bar{A}}_{n-x}$ e considerem-se todas as ordens possíveis;

  Obtém-se $\binom{n}{x}\theta^x(1-\theta)^{n-x}$ (esquema binomial visto no capítulo 2)

- **Exemplo 5.1 –** Qual a probabilidade para, em cinco lançamentos de um dado "perfeito", se obter duas vezes a «sena»?

- Se a v.a. X tem função probabilidade

$$f(x\,|\,\theta) = \binom{n}{x}\theta^x(1-\theta)^{n-x}, \quad x = 0,1,2,\ldots,n \quad (0 < \theta < 1),$$

diz-se que tem **distribuição binomial**. Simbolicamente, $X \sim B(n;\theta)$.

- Família de distribuições, indexadas pelos parâmetros n e θ;
- A distribuição de Bernoulli pode obter-se da distribuição binomial fazendo $n = 1$.

- Para verificar que se trata de uma função probabilidade basta verificar que:
  - $f(x;\theta) > 0 \qquad x = 0,1,\ldots,n \qquad \rightarrow$ óbvio
  - $\sum_{x=0}^{n} f(x;\theta) = 1 \rightarrow$ desenvolvimento do binómio de Newton $[(1-\theta)+\theta]^n = 1$.

    Recorde-se que $(a+b)^n = \sum_{i=0}^{n} \binom{n}{i} a^i\, b^{n-i}$

- Cálculo das probabilidades para distribuições binomiais:
  - Máquina calcular ou computador
  - Tabelas estatísticas

- Tabela 1 para valores de n de 1 a 20 e para alguns valores de θ (0.05, 0.10, 0.15, …, 0.50). Quando $\theta > 0.50$ a relação, $X \sim B(n;\theta) \Leftrightarrow Y = (n - X) \sim B(n;1-\theta)$, permite remeter todos os cálculos para as tabelas construídas para $0 < \theta < 0.50$.
- **Exemplo 5.3 –** Sabe-se que, com determinado tratamento administrado a pacientes em condições bem definidas, se alcançam 70% de curas para certa doença. Se o tratamento é aplicado a 20 pacientes em tais condições, qual é a probabilidade de: (a) obter 15 curas no máximo; (b) obter 12 ou mais curas; (c) obter um número de curas não inferior a 10 nem superior a 15.

Solução: Seja X o número de curas entre os 20 pacientes sujeitos a medicação, $X \sim B(20;0.7)$.

TABELA 1 – DISTRIBUIÇÃO BINOMIAL

A. Função probabilidade

$$f(x\,|\,\theta) = P(X = x) = \binom{n}{x}\theta^x(1-\theta)^{n-x}$$

n	x	θ = .05	.10	.15	.20	.25	.30	.35	.40	.45	.50
1	0	.9500	.9000	.8500	.8000	.7500	.7000	.6500	.6000	.5500	.5000
	1	.0500	.1000	.1500	.2000	.2500	.3000	.3500	.4000	.4500	.5000
2	0	.9025	.8100	.7225	.6400	.5625	.4900	.4225	.3600	.3025	.2500
	1	.0950	.1800	.2550	.3200	.3750	.4200	.4550	.4800	.4950	.5000
	2	.0025	.0100	.0225	.0400	.0625	.0900	.1225	.1600	.2025	.2500
3	0	.8574	.7290	.6141	.5120	.4219	.3430	.2746	.2160	.1664	.1250
	1	.1354	.2430	.3251	.3840	.4219	.4410	.4436	.4320	.4084	.3750
	2	.0071	.0270	.0574	.0960	.1406	.1890	.2389	.2880	.3341	.3750
	3	.0001	.0010	.0034	.0080	.0156	.0270	.0429	.0640	.0911	.1250
4	0	.8145	.6561	.5220	.4096	.3164	.2401	.1785	.1296	.0915	.0625
	1	.1715	.2916	.3685	.4096	.4219	.4116	.3845	.3456	.2995	.2500
	2	.0135	.0486	.0975	.1536	.2109	.2646	.3105	.3456	.3675	.3750
	3	.0005	.0036	.0115	.0256	.0469	.0756	.1115	.1536	.2005	.2500
	4	.0000	.0001	.0005	.0016	.0039	.0081	.0150	.0256	.0410	.0625
5	0	.7738	.5905	.4437	.3277	.2373	.1681	.1160	.0778	.0503	.0313
	1	.2036	.3281	.3915	.4096	.3955	.3602	.3124	.2592	.2059	.1563
	2	.0214	.0729	.1382	.2048	.2637	.3087	.3364	.3456	.3369	.3125
	3	.0011	.0081	.0244	.0512	.0879	.1323	.1811	.2304	.2757	.3125
	4	.0000	.0005	.0022	.0064	.0146	.0284	.0488	.0768	.1128	.1563
	5	.0000	.0000	.0001	.0003	.0010	.0024	.0053	.0102	.0185	.0313
6	0	.7351	.5314	.3771	.2621	.1780	.1176	.0754	.0467	.0277	.0156
	1	.2321	.3543	.3993	.3932	.3560	.3025	.2437	.1866	.1359	.0938
	2	.0305	.0984	.1762	.2458	.2966	.3241	.3280	.3110	.2780	.2344
	3	.0021	.0146	.0415	.0819	.1318	.1852	.2355	.2765	.3032	.3125
	4	.0001	.0012	.0055	.0154	.0330	.0595	.0951	.1382	.1861	.2344
	5	.0000	.0001	.0004	.0015	.0044	.0102	.0205	.0369	.0609	.0938
	6	.0000	.0000	.0000	.0001	.0002	.0007	.0018	.0041	.0083	.0156

B. Função de distribuição

$$F(x\,|\,\theta) = P(X \le x) = \sum_{i=0}^{x}\binom{n}{i}\theta^i(1-\theta)^{n-i}$$

n	x	θ = .05	.10	.15	.20	.25	.30	.35	.40	.45	.50
1	0	.9500	.9000	.8500	.8000	.7500	.7000	.6500	.6000	.5500	.5000
	1	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000
2	0	.9025	.8100	.7225	.6400	.5625	.4900	.4225	.3600	.3025	.2500
	1	.9975	.9900	.9775	.9600	.9375	.9100	.8775	.8400	.7975	.7500
	2	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000
3	0	.8574	.7290	.6141	.5120	.4219	.3430	.2746	.2160	.1664	.1250
	1	.9928	.9720	.9393	.8960	.8438	.7840	.7183	.6480	.5748	.5000
	2	.9999	.9990	.9966	.9920	.9844	.9730	.9571	.9360	.9089	.8750
	3	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000
4	0	.8145	.6561	.5220	.4096	.3164	.2401	.1785	.1296	.0915	.0625
	1	.9860	.9477	.8905	.8192	.7383	.6517	.5630	.4752	.3910	.3125
	2	.9995	.9963	.9880	.9728	.9492	.9163	.8735	.8208	.7585	.6875
	3	1.0000	.9999	.9995	.9984	.9961	.9919	.9850	.9744	.9590	.9375
	4	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000
5	0	.7738	.5905	.4437	.3277	.2373	.1681	.1160	.0778	.0503	.0313
	1	.9774	.9185	.8352	.7373	.6328	.5282	.4284	.3370	.2562	.1875
	2	.9988	.9914	.9734	.9421	.8965	.8369	.7648	.6826	.5931	.5000
	3	1.0000	.9995	.9978	.9933	.9844	.9692	.9460	.9130	.8688	.8125
	4	1.0000	1.0000	.9999	.9997	.9990	.9976	.9947	.9898	.9815	.9688
	5	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000
6	0	.7351	.5314	.3771	.2621	.1780	.1176	.0754	.0467	.0277	.0156
	1	.9672	.8857	.7765	.6554	.5339	.4202	.3191	.2333	.1636	.1094
	2	.9978	.9842	.9527	.9011	.8306	.7443	.6471	.5443	.4415	.3438
	3	.9999	.9987	.9941	.9830	.9624	.9295	.8826	.8208	.7447	.6563
	4	1.0000	.9999	.9996	.9984	.9954	.9891	.9777	.9590	.9308	.8906
	5	1.0000	1.0000	1.0000	.9999	.9998	.9993	.9982	.9959	.9917	.9844
	6	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000

TABELA 1 – DISTRIBUIÇÃO BINOMIAL
A. Função probabilidade

n	*x*	0.05	0.10	0.15	0.20	0.25	0.30	0.35
7	0	0.6983	0.4783	0.3206	0.2097	0.1335	0.0824	0.0490
	1	0.2573	0.3720	0.3960	0.3670	0.3115	0.2471	0.1848
	2	0.0406	0.1240	0.2097	0.2753	0.3115	0.3177	0.2985
	3	0.0036	0.0230	0.0617	0.1147	0.1730	0.2269	0.2679
	4	0.0002	0.0026	0.0109	0.0287	0.0577	0.0972	0.1442
	5	0.0000	0.0002	0.0012	0.0043	0.0115	0.0250	0.0466
	6	0.0000	0.0000	0.0001	0.0004	0.0013	0.0036	0.0084
	7	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0001	0.0002	0.0006
8	0	0.6634	0.4305	0.2725	0.1678	0.1001	0.0576	0.0319

TABELA 1 – DISTRIBUIÇÃO BINOMIAL
B. Função de distribuição

n	*x*	0.05	0.10	0.15	0.20	0.25	0.30	0.35
7	**0**	0.6983	0.4783	0.3206	0.2097	0.1335	0.0824	0.0490
	1	0.9556	0.8503	0.7166	0.5767	0.4449	0.3294	0.2338
	2	0.9962	0.9743	0.9262	0.8520	0.7564	0.6471	0.5323
	5	0.9998	0.9973	0.9879	0.9667	0.9294	0.8740	0.8002
	4	1.0000	0.9998	0.9988	0.9953	0.9871	0.9712	0.9444
	5	1.0000	1.0000	0.9999	0.9996	0.9987	0.9962	0.9910
	6	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	0.9999	0.9998	0.9994
	7	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000
8	**0**	0.6634	0.4305	0.2725	0.1678	0.1001	0.0576	0.0319

- Função geradora dos momentos: $M(s) = E\{e^{sX}\} = \left[(1-\theta) + \theta e^{s}\right]^{n}$.

$$M(s) = \sum_{x=0}^{n} e^{sx} \binom{n}{x} \theta^{x} (1-\theta)^{n-x} = \sum_{x=0}^{n} \binom{n}{x} \left(\theta e^{s}\right)^{x} (1-\theta)^{n-x} = \left[(1-\theta) + \theta e^{s}\right]^{n}$$

- Momentos (é mais fácil partir dos momentos da Bernoulli)

$$M'(s) = n\left[(1-\theta) + \theta e^{s}\right]^{n-1} \theta e^{s},$$

$$M''(s) = n(n-1)\left[(1-\theta) + \theta e^{s}\right]^{n-2} \theta^{2} e^{2s} + n\left[(1-\theta) + \theta e^{s}\right]^{n-1} \theta e^{s},$$

donde

$$E(X) = M'(0) = n\theta \qquad \mathrm{Var}(X) = n\theta(1-\theta) \qquad \sigma = \sqrt{n\theta(1-\theta)} \qquad \gamma_1 = \frac{1-2\theta}{\sigma}$$

Binomial e Bernoulli

X_i $(i = 1,2,...,n)$: v.a. associada com a i-ésima prova de Bernoulli (X_i tem distribuição de Bernoulli com parâmetro θ).

A variável $X = \sum_{i=1}^{n} X_i$ tem distribuição binomial de parâmetros n e θ. Mostrar recorrendo à fgm

$$X_i \sim B(1;\theta) \Leftrightarrow M_{X_i}(s) = (1-\theta) + \theta e^s$$

$$M_X(s) = \prod_{i=1}^{n} M_{X_i}(s) = \left[(1-\theta) + \theta e^s\right]^n$$

que é a função geradora dos momentos de uma binomial.

- Soma de binomiais **independentes com o mesmo parâmetro** θ.

  Sejam Y_1 e Y_2 duas variáveis aleatórias independentes. Então,

$$Y_1 \sim B(n_1;\theta,),\ Y_2 \sim B(n_2;\theta) \Rightarrow Y = Y_1 + Y_2 \sim B(n,\theta)$$

  onde $n = n_1 + n_2$.

3 – Distribuição de Poisson

- A distribuição de Poisson está associada com um processo de contagem com o mesmo nome que se estuda na teoria dos processos estocásticos;
- Definição de um processo de Poisson – Suponha-se que se procede à contagem do número de eventos ocorridos ao longo do tempo. Tem-se um processo de Poisson com parâmetro (taxa média) $\lambda > 0$ quando se verificam as seguintes condições:
  - o número de eventos que ocorrem em dois intervalos disjuntos são independentes;
  - a probabilidade de ocorrer exactamente um evento em qualquer intervalo de amplitude Δt arbitrariamente pequena é aproximadamente $\lambda\Delta t$;
  - a probabilidade de ocorrerem dois ou mais eventos em qualquer intervalo de amplitude Δt arbitrariamente pequena é aproximadamente igual a zero.

- Uma variável aleatória X tem distribuição de Poisson se e só se,

$$f(x\,|\,\lambda)=\frac{e^{-\lambda}\lambda^{x}}{x!},\;\; x=0,1,2,\ldots,\;\; (\lambda>0).$$

Simbolicamente, $X \sim \mathrm{Po}(\lambda)$.

- Família de distribuições indexada por λ.

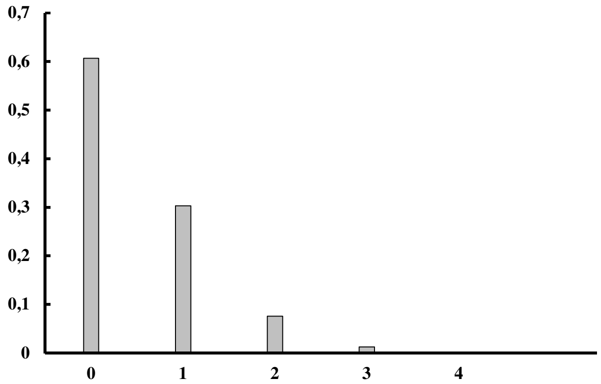
$$\sum_{x=0}^{\infty}\frac{e^{-\lambda}\lambda^{x}}{x!}=e^{-\lambda}\sum_{x=0}^{\infty}\frac{\lambda^{x}}{x!}=1 \quad\rightarrow\quad \sum\lambda^{x}/x! \text{ é o desenvolvimento em série de } e^{\lambda}$$

- Função geradora de momentos: $M(s)=E(e^{sX})=\exp\{\lambda(e^{s}-1)\}$.

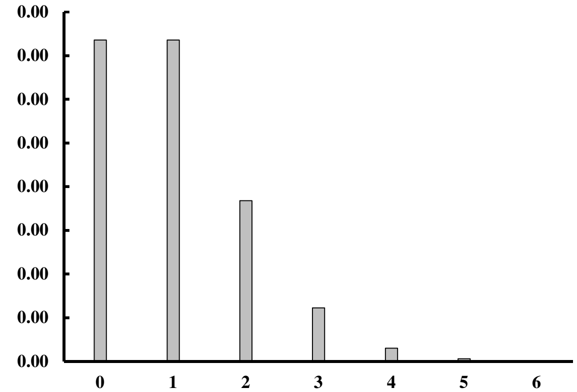
$$M(s)=\sum_{x=0}^{\infty}e^{sx}\frac{e^{-\lambda}\lambda^{x}}{x!}=e^{-\lambda}\sum_{x=0}^{\infty}\frac{\left(e^{s}\lambda\right)^{x}}{x!}=e^{-\lambda}\times \mathrm{e}^{\lambda e^{s}}=\exp\{\lambda(e^{s}-1)\}$$

- Momentos: Média igual à variância

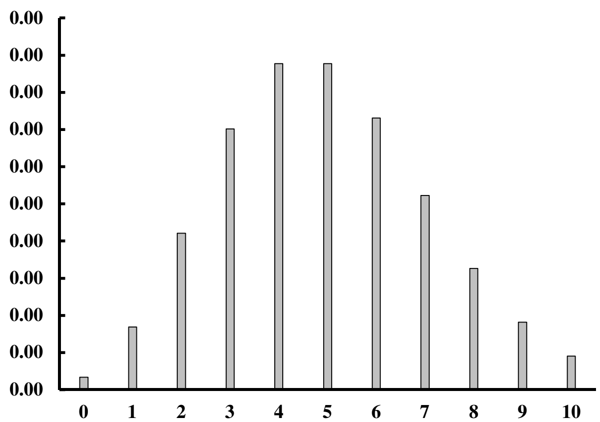
$$E(X)=\sum_{x=0}^{\infty}x\frac{e^{-\lambda}\lambda^{x}}{x!}=\lambda e^{-\lambda}\sum_{x=1}^{\infty}\frac{\lambda^{x-1}}{(x-1)!}=\lambda;\quad \mathrm{Var}(X)=\lambda;\;\; \sigma=\sqrt{\lambda};\;\; \gamma_1=\lambda^{-1/2}$$



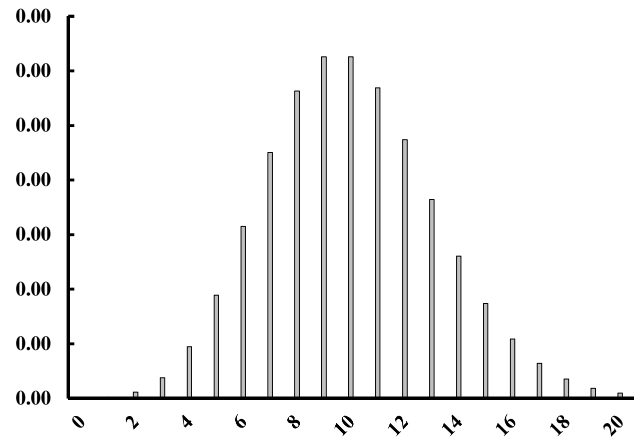
$\lambda = 0.5$



$\lambda = 1$



$\lambda = 5$



$\lambda = 10$

DISTRIBUIÇÃO DE POISSON

A. Função probabilidade

$$f(x \mid \lambda) = P(X = x) = \frac{e^{-\lambda}\lambda^{x}}{x!}$$

λ

x	0.1	0.2	0.3	0.4	0.5	0.6	0.7	0.8	0.9	1.0
0	.9048	.8187	.7408	.6703	.6065	.5488	.4966	.4493	.4066	.3679
1	.0905	.1637	.2222	.2681	.3033	.3293	.3476	.3595	.3659	.3679
2	.0045	.0164	.0333	.0536	.0758	.0988	.1217	.1438	.1647	.1839
3	.0002	.0011	.0033	.0072	.0126	.0198	.0284	.0383	.0494	.0613
4	.0000	.0001	.0003	.0007	.0016	.0030	.0050	.0077	.0111	.0153
5	.0000	.0000	.0000	.0001	.0002	.0004	.0007	.0012	.0020	.0031
6	.0000	.0000	.0000	.0000	.0000	.0000	.0001	.0002	.0003	.0005
7	.0000	.0000	.0000	.0000	.0000	.0000	.0000	.0000	.0000	.0001

x	1.1	1.2	1.3	1.4	1.5	1.6	1.7	1.8	1.9	2.0
0	.3329	.3012	.2725	.2466	.2231	.2019	.1827	.1653	.1496	.1353
1	.3662	.3614	.3543	.3452	.3347	.3230	.3106	.2975	.2842	.2707
2	.2014	.2169	.2303	.2417	.2510	.2584	.2640	.2678	.2700	.2707
3	.0738	.0867	.0998	.1128	.1255	.1378	.1496	.1607	.1710	.1804
4	.0203	.0260	.0324	.0395	.0471	.0551	.0636	.0723	.0812	.0902
5	.0045	.0062	.0084	.0111	.0141	.0176	.0216	.0260	.0309	.0361
6	.0008	.0012	.0018	.0026	.0035	.0047	.0061	.0078	.0098	.0120
7	.0001	.0002	.0003	.0005	.0008	.0011	.0015	.0020	.0027	.0034
8	.0000	.0000	.0001	.0001	.0001	.0002	.0003	.0005	.0006	.0009
9	.0000	.0000	.0000	.0000	.0000	.0000	.0001	.0001	.0001	.0002

x	2.1	2.2	2.3	2.4	2.5	2.6	2.7	2.8	2.9	3.0
0	.1225	.1108	.1003	.0907	.0821	.0743	.0672	.0608	.0550	.0498
1	.2572	.2438	.2306	.2177	.2052	.1931	.1815	.1703	.1596	.1494
2	.2700	.2681	.2652	.2613	.2565	.2510	.2450	.2384	.2314	.2240
3	.1890	.1966	.2033	.2090	.2138	.2176	.2205	.2225	.2237	.2240
4	.0992	.1082	.1169	.1254	.1336	.1414	.1488	.1557	.1622	.1680
5	.0417	.0476	.0538	.0602	.0668	.0735	.0804	.0872	.0940	.1008
6	.0146	.0174	.0206	.0241	.0278	.0319	.0362	.0407	.0455	.0504
7	.0044	.0055	.0068	.0083	.0099	.0118	.0139	.0163	.0188	.0216
8	.0011	.0015	.0019	.0025	.0031	.0038	.0047	.0057	.0068	.0081

B. Função de distribuição

$$F(x \mid \lambda) = P(X \le x) = \sum_{i=0}^{x} \frac{e^{-\lambda}\lambda^{i}}{i!}$$

λ

x	0.1	0.2	0.3	0.4	0.5	0.6	0.7	0.8	0.9	1.0
0	.9048	.8187	.7408	.6703	.6065	.5488	.4966	.4493	.4066	.3679
1	.9953	.9825	.9631	.9384	.9098	.8781	.8442	.8088	.7725	.7358
2	.9998	.9989	.9964	.9921	.9856	.9769	.9659	.9526	.9371	.9197
3	1.0000	.9999	.9997	.9992	.9982	.9966	.9942	.9909	.9865	.9810
4	1.0000	1.0000	1.0000	.9999	.9998	.9996	.9992	.9986	.9977	.9963
5	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	.9999	.9998	.9997	.9994
6	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	.9999
7	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000

x	1.1	1.2	1.3	1.4	1.5	1.6	1.7	1.8	1.9	2.0
0	.3329	.3012	.2725	.2466	.2231	.2019	.1827	.1653	.1496	.1353
1	.6990	.6626	.6268	.5918	.5578	.5249	.4932	.4628	.4337	.4060
2	.9004	.8795	.8571	.8335	.8088	.7834	.7572	.7306	.7037	.6767
3	.9743	.9662	.9569	.9463	.9344	.9212	.9068	.8913	.8747	.8571
4	.9946	.9923	.9893	.9857	.9814	.9763	.9704	.9636	.9559	.9473
5	.9990	.9985	.9978	.9968	.9955	.9940	.9920	.9896	.9868	.9834
6	.9999	.9997	.9996	.9994	.9991	.9987	.9981	.9974	.9966	.9955
7	1.0000	1.0000	.9999	.9999	.9998	.9997	.9996	.9994	.9992	.9989
8	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	.9999	.9999	.9998	.9998
9	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000

x	2.1	2.2	2.3	2.4	2.5	2.6	2.7	2.8	2.9	3.0
0	.1225	.1108	.1003	.0907	.0821	.0743	.0672	.0608	.0550	.0498
1	.3796	.3546	.3309	.3084	.2873	.2674	.2487	.2311	.2146	.1991
2	.6496	.6227	.5960	.5697	.5438	.5184	.4936	.4695	.4460	.4232
3	.8386	.8194	.7993	.7787	.7576	.7360	.7141	.6919	.6696	.6472
4	.9379	.9275	.9162	.9041	.8912	.8774	.8629	.8477	.8318	.8153
5	.9796	.9751	.9700	.9643	.9580	.9510	.9433	.9349	.9258	.9161
6	.9941	.9925	.9906	.9884	.9858	.9828	.9794	.9756	.9713	.9665
7	.9985	.9980	.9974	.9967	.9958	.9947	.9934	.9919	.9901	.9881
8	.9997	.9995	.9994	.9991	.9989	.9985	.9981	.9976	.9969	.9962

A. Função probabilidade

$$f(x \mid \lambda) = P(X = x) = \frac{e^{-\lambda}\lambda^{x}}{x!}$$

x	1.1	1.2	1.3	1.4	1.5	1.6	1.7	1.8	1.9	2.0
0	.3329	.3012	.2725	.2466	.2231	.2019	.1827	.1653	.1496	.1353
1	.3662	.3614	.3543	.3452	.3347	.3230	.3106	.2975	.2842	.2707
2	.2014	.2169	.2303	.2417	.2510	.2584	.2640	.2678	.2700	.2707
3	.0738	.0867	.0998	.1128	.1255	.1378	.1496	.1607	.1710	.1804
4	.0203	.0260	.0324	.0395	.0471	.0551	.0636	.0723	.0812	.0902
5	.0045	.0062	.0084	.0111	.0141	.0176	.0216	.0260	.0309	.0361
6	.0008	.0012	.0018	.0026	.0035	.0047	.0061	.0078	.0098	.0120
7	.0001	.0002	.0003	.0005	.0008	.0011	.0015	.0020	.0027	.0034
8	.0000	.0000	.0001	.0001	.0001	.0002	.0003	.0005	.0006	.0009
9	.0000	.0000	.0000	.0000	.0000	.0000	.0001	.0001	.0001	.0002

B. Função de distribuição

$$F(x|\lambda) = P(X \le x) = \sum_{i=0}^{x} \frac{e^{-\lambda}\lambda^i}{i!}$$

x	1.1	1.2	1.3	1.4	1.5	1.6	1.7	1.8	1.9	2.0
0	.3329	.3012	.2725	.2466	.2231	.2019	.1827	.1653	.1496	.1353
1	.6990	.6626	.6268	.5918	.5578	.5249	.4932	.4628	.4337	.4060
2	.9004	.8795	.8571	.8335	.8088	.7834	.7572	.7306	.7037	.6767
3	.9743	.9662	.9569	.9463	.9344	.9212	.9068	.8913	.8747	.8571
4	.9946	.9923	.9893	.9857	.9814	.9763	.9704	.9636	.9559	.9473
5	.9990	.9985	.9978	.9968	.9955	.9940	.9920	.9896	.9868	.9834
6	.9999	.9997	.9996	.9994	.9991	.9987	.9981	.9974	.9966	.9955
7	1.0000	1.0000	.9999	.9999	.9998	.9997	.9996	.9994	.9992	.9989
8	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	.9999	.9999	.9998	.9998
9	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000

- **Exemplo 5.11 –** Numa fábrica de têxteis existem numerosos teares do mesmo tipo. Concluiu-se que o número de teares que se avariam cada mês é uma variável aleatória $X \sim \text{Po}(\lambda = 3)$.

  Probabilidade para que durante um mês se avariem sete ou mais teares:

  Determinar a capacidade mensal mínima disponível C da oficina de reparação, de modo a ser pelo menos 0.9 a probabilidade de não haver teares aguardando reparação.

Processo de Poisson e distribuição de Poisson

Num **processo de Poisson**, os acontecimentos ocorrem a uma taxa média de λ por unidade de tempo, o número de ocorrências num intervalo de amplitude t tem distribuição de Poisson de parâmetro λt

$$f(x \mid \lambda t) = \frac{e^{-\lambda t}\,(\lambda t)^x}{x!}, \qquad x = 0,1,2,\ldots \quad (\lambda > 0).$$

Soma de Poisson independentes

- Teorema 5.3 – Sejam X_1 e X_2 duas v.a. independentes. Então,

$$X_1 \sim \mathrm{Po}(\lambda_1),\ X_2 \sim \mathrm{Po}(\lambda_2) \Rightarrow X = X_1 + X_2 \sim \mathrm{Po}(\lambda) \text{ onde } \lambda = \lambda_1 + \lambda_2.$$

Lei dos Acontecimentos raros → Binomial para Poisson.

Quando $\theta = \lambda / n \to 0$, mantendo-se fixo $n\theta = \lambda$, a binomial tende para a Poisson,

$$\lim_{n\to\infty} \binom{n}{x} \theta^x (1-\theta)^{n-x} = \lim_{n\to\infty} \binom{n}{x} \left(\frac{\lambda}{n}\right)^x \left(1-\frac{\lambda}{n}\right)^{n-x} = \frac{e^{-n\theta}(n\theta)^x}{x!}.$$

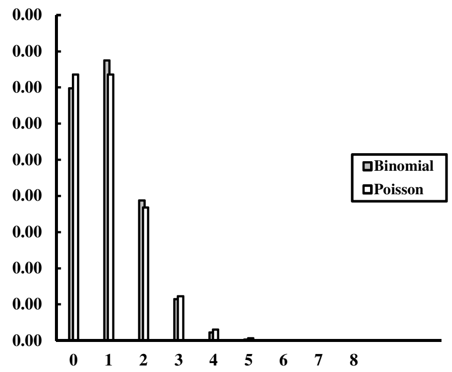
A **regra prática** para utilizar esta "lei" baseia-se no pressuposto de que se tem um acontecimento raro e um número "elevado" de observações.

Assim, **não é aconselhável** fazer a aproximação quando:

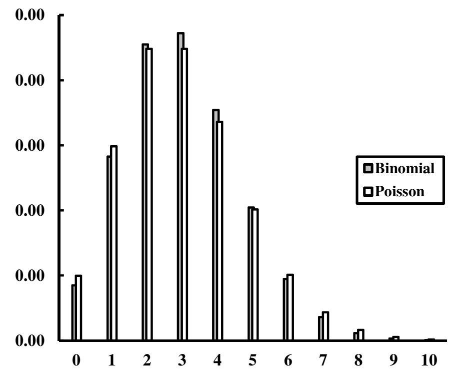
$0.1 < \theta < 0.9$ (quando $\theta \geq 0.9$, evidentemente que o acontecimento em causa não é "raro", mas sim o seu complementar)

$n \leq 20$ (que são os valores de n considerados na tabela 1).

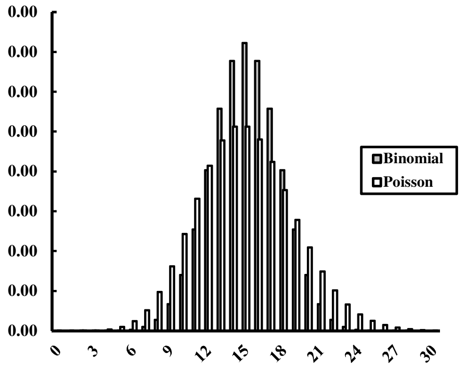
A **figura 4.5** ilustra a qualidade da aproximação em 4 situações.



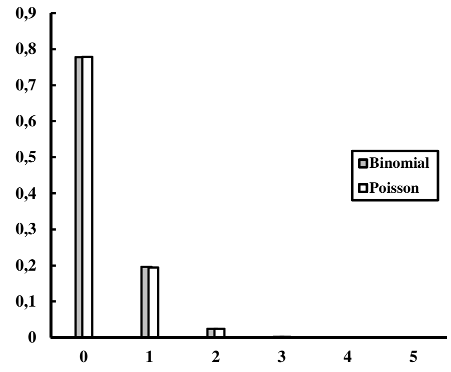
B(10;0.1) *versus* Po(1)



B(30;0.1) *versus* Po(3)



B(30;0.5) *versus* Po(15)



B(25;0.01) *versus* Po(0.25)

- **Exemplo 5.12** (adaptado) **–** Sabendo que $\theta = 0.001$ é a probabilidade, P, de uma peça, produzida por certa máquina, ser defeituosa, qual a probabilidade de, num lote de 1000 peças haver mais de uma defeituosa?

X - número de peças defeituosas num lote de 1000 $\qquad X \sim b(1000;0.001)$

Lei dos acontecimentos raros $\rightarrow X \overset{\circ}{\sim} \text{Po}(1000 \times 0.001 = 1)$

$$P = 1 - \binom{1000}{0}(0.999)^{1000} - \binom{1000}{1}(0.999)^{999}\,0.001 = 0.26424 \quad \text{(computador)}$$

$$\approx 1 - \frac{e^{-1}1^0}{0!} - \frac{e^{-1}1^1}{1!} = 0.26424.$$

4 - Distribuição uniforme contínua

- Mesmo nome (porque a ideia é a mesma) mas diferente da uniforme discreta
- A v.a. X tem distribuição uniforme no intervalo (α, β), com $\alpha < \beta$, quando a função densidade é da forma,

$$f(x \mid \alpha, \beta) = \begin{cases} \dfrac{1}{\beta - \alpha} & (\alpha < x < \beta), \\ 0 & (\text{outros } x). \end{cases}$$

Simbolicamente, $X \sim U(\alpha, \beta)$.

- Função de distribuição:

$$F(x \mid \alpha, \beta) = \begin{cases} 0 & (x < \alpha), \\ \dfrac{x - \alpha}{\beta - \alpha} & (\alpha \le x < \beta), \\ 1 & (x \ge \beta). \end{cases}$$

- Função geradora dos momentos

$$M(s)=E\left(e^{sX}\right)=\int_{\alpha}^{\beta}\frac{e^{sx}}{\beta-\alpha}\,dx=\begin{cases}\dfrac{e^{s\beta}-e^{s\alpha}}{s(\beta-\alpha)} & (s\neq 0)\\ 1 & (s=0)\end{cases}$$

- Expressão geral dos momentos em relação à origem

$$E\left(X^{k}\right)=\int_{\alpha}^{\beta}\frac{x^{k}}{\beta-\alpha}\,dx=\frac{1}{\beta-\alpha}\left[\frac{x^{k+1}}{k+1}\right]_{\alpha}^{\beta}=\frac{\beta^{k+1}-\alpha^{k+1}}{(k+1)(\beta-\alpha)}.$$

$$E(X)=\frac{\alpha+\beta}{2},\quad \mathrm{Var}(X)=\frac{(\beta-\alpha)^{2}}{12},\quad \gamma_{1}=0$$

Uniforme (0, 1)

O caso $\alpha = 0, \beta = 1$, isto é, $X \sim U(0,1)$, é o de **maior interesse**

$f(x) = \begin{cases} 1 & (0 < x < 1) \\ 0 & (\text{outros } x) \end{cases}$	$F(x) = \begin{cases} 0 & (x < 0) \\ x & (0 \le x < 1) \\ 1 & (x \ge 1) \end{cases}$
$E(X^k) = \dfrac{1}{(k+1)}$ logo $E(X) = \dfrac{1}{2}$, $\mathrm{Var}(X) = \dfrac{1}{12}$, $\gamma_1 = 0$	

- **Teorema 5.4 – Transformação uniformizante – resultado particularmente importante em problemas de simulação.**

  Este resultado mostra que, em certas condições, $Y = F_X(X) \sim U(0,1)$ e inversamente que se $Y \sim U(0,1)$ então $X = F_X^{-1}(Y) \sim F_X(x)$

- Exemplo 5.13 ?

5 - Distribuição normal

- A v.a. X tem distribuição normal com parâmetros μ e σ^2 quando a função densidade é da forma

$$f(x\,|\,\mu,\sigma^2)=\frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}}\exp\left\{-\frac{1}{2\sigma^2}(x-\mu)^2\right\},$$

$$-\infty<x<+\infty,\quad -\infty<\mu<+\infty,\quad 0<\sigma^2<+\infty,$$

Simbolicamente $X\sim N(\mu,\sigma^2)$.

- Os parâmetros da distribuição normal representam-se por μ e σ^2 porque correspondem respectivamente, como se vai ver, à média e variância da variável aleatória X.

- Função de distribuição: $F(x\,|\,\mu,\sigma^2)=\int_{-\infty}^{x}\frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}}\exp\left\{-\frac{1}{2\sigma^2}(t-\mu)^2\right\}dt\,,$

  para o qual **não se conhece solução analítica** → recurso à **análise numérica**

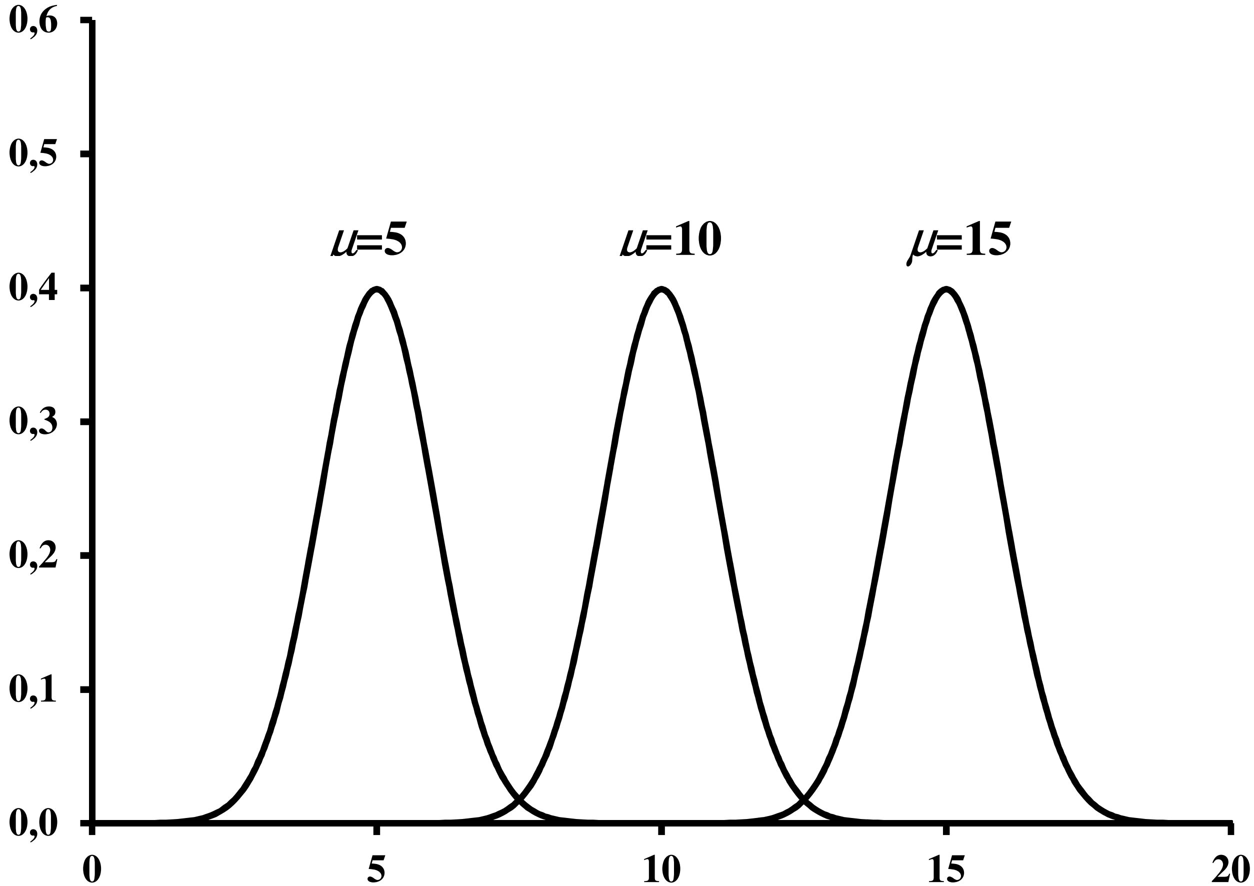


Fig. 5.4a – Funções densidade da distribuição normal com a mesma variância ($\sigma^2 = 1$)

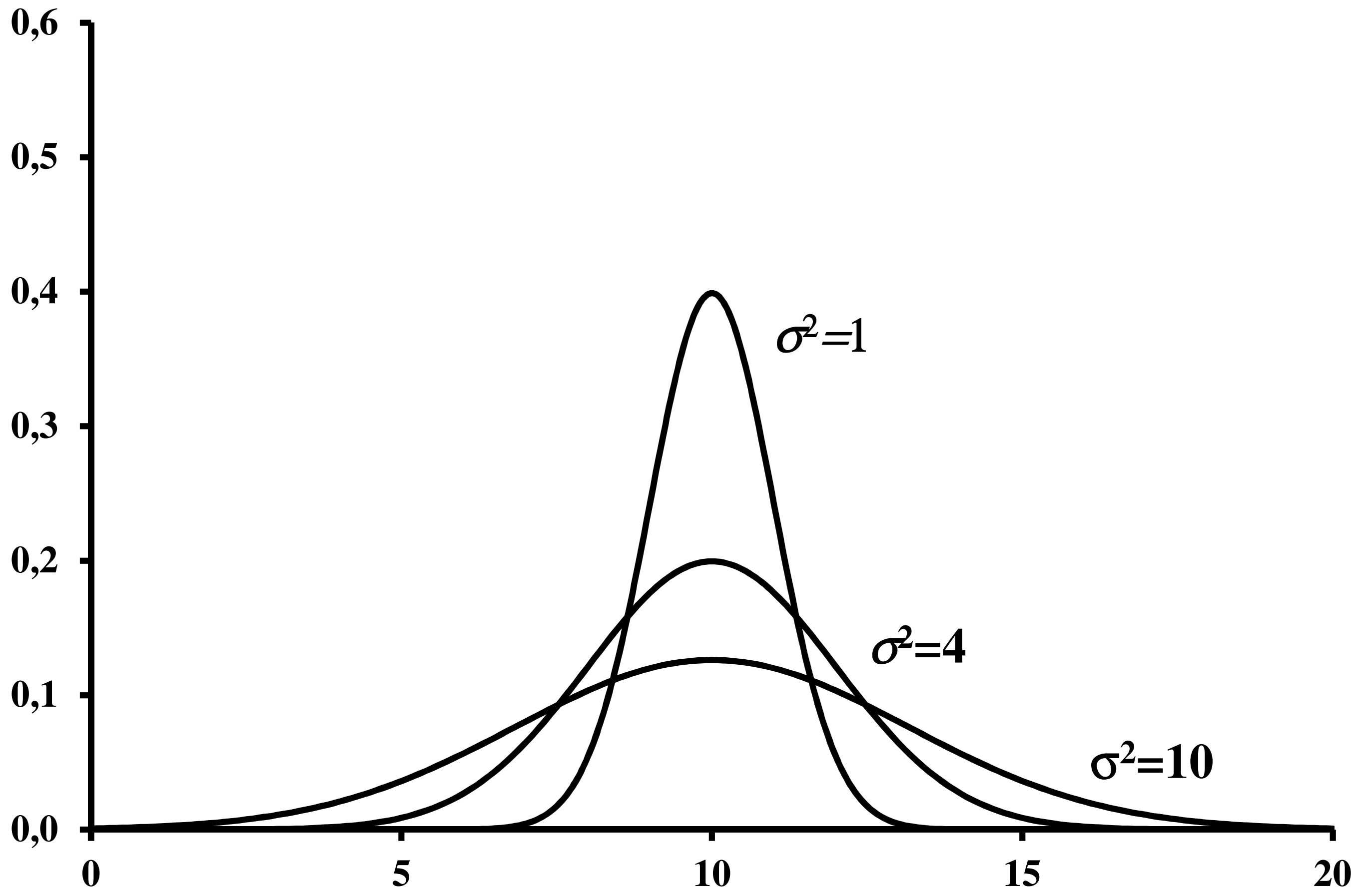


Fig. 5.4b – Funções densidade da distribuição normal com a mesma média ($\mu = 10$)

Distribuição normal estandardizada - caso particular, com $\mu = 0$ e $\sigma^2 = 1$

- função densidade $\phi(z) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-z^2/2}$
- função de distribuição $\Phi(z) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{z} e^{-t^2/2} dt$

Facilmente se passa de uma normal (μ, σ^2) para uma normal (0,1) já que, se $X \sim N(\mu, \sigma^2)$, a variável estandardizada,

$$Z = \frac{X - \mu}{\sigma} \sim N(0,1)$$

Propriedades da distribuição normal

- A função densidade normal é simétrica em relação à recta $x = \mu$,

$$f(x-\mu) = f(x+\mu)$$

Em particular, tratando-se da distribuição normal estandardizada,

$$\phi(x) = \phi(-x), \quad \Phi(x) = 1 - \Phi(-x)$$ importante

- Função geradora dos momentos de $Z \sim N(0,1)$

$$M_Z(s) = E\left(e^{sZ}\right) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{sz} e^{-z^2/2} dz = e^{s^2/2}$$ ver livro

- Função geradora dos momentos de $X \sim N(\mu, \sigma^2)$,

$$M_X(s) = \exp\left\{\mu s + \frac{\sigma^2 s^2}{2}\right\}.$$

$$X = \mu + \sigma Z \rightarrow M_X(s) = E\left(e^{sX}\right) = E\left(e^{\mu s} e^{\sigma sZ}\right) = e^{\mu s} M_Z(\sigma s) = \exp\left\{\mu s + \frac{\sigma^2 s^2}{2}\right\}.$$

- **Exemplo 5.14 –** Se X tem função densidade,

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{32\pi}} \exp\left\{-\frac{(x+7)^2}{32}\right\}, \quad -\infty < x < \infty,$$

então $X \sim N(-7,16)$ e tem f.g.m. $M(s) = \exp\{-7s + 8s^2\}$.

- **Exemplo 5.15 –** Se X tem função geradora dos momentos $M(s) = \exp\{5s + 12s^2\}$ então $X \sim N(5,24)$

- Cálculo dos momentos (deriva-se a geradora e momentos):

$$M'(s) = (\mu + \sigma^2 s)\exp\left\{\mu s + \frac{\sigma^2 s^2}{2}\right\}$$

$$M''(s) = \left[(\mu + \sigma^2 s)^2 + \sigma^2\right]\exp\left\{\mu s + \frac{\sigma^2 s^2}{2}\right\}$$

Logo

$$E(X) = \mu \,, \mathrm{Var}(X) = \sigma^2 .$$

- Os momentos centrais de ordem impar são todos nulos (simetria) e a expressão dos momentos centrais de ordem par é $\mu_{2r} = \dfrac{(2r)!\sigma^{2r}}{2^r r!}, \; r = 1,2,\cdots$

(define-se $M_{X-\mu}(s)$ (f.g. momentos centrais) e calculam-se as sucessivas derivadas)

- Logo $\gamma_1 = 0, \; \mu_4 = 3\sigma^2$ e portanto $\gamma_2 = 3$

- É habitual classificar as distribuições simétricas comparando-as com a normal:
  - Distribuições *leptokurtica* ($\gamma_2 > 3$) → caudas mais "espessas" (com zona central mais "pontiaguda") que a distribuição normal.
  - Distribuições *platikurtica* ($\gamma_2 < 3$) → caudas mais "finas" (com zona central mais "achatada") que a distribuição normal.
  - Distribuição *mesokurtica* ($\gamma_2 = 3$)

- Algumas características da normal:

Intervalos	**Probabilidades**	**Intervalos**	**Probabilidades**
$\mu \pm \sigma$	0.6826	$\mu \pm 0.6745\,\sigma$	0.5000
$\mu \pm 2\sigma$	0.9544	$\mu \pm 1.6450\,\sigma$	0.9000
$\mu \pm 3\sigma$	0.9973	$\mu \pm 1.9600\,\sigma$	0.9500
		$\mu \pm 2.5758\,\sigma$	0.9900

Tabelas da distribuição normal estandardizada (padronizada):

A tabela 4 refere-se à função $\Phi(z)$

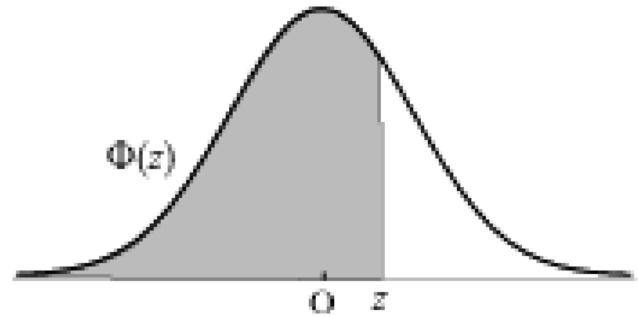
A tabela 5 diz respeito à função inversa $\Phi^{-1}(z)$, permitindo determinar, para certos valores de $\Phi(z)$, a respectiva abcissa z.

Exemplificar

- $X \sim N(0,1)$ Calcular $P(X < 2.53)$, $P(X < -2.45)$, $P(-1 < X < 2.03)$
- $X \sim N(1,4)$ Calcular $P(X < 2.53)$, $P(X < -2.45)$, $P(-1 < X < 2.03)$

TABELA 4 – DISTRIBUIÇÃO NORMAL – Função de distribuição

$$\Phi(z) = P(Z \leq z) = \int_{-\infty}^{z} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-x^2/2} dx$$



z	.00	.01	.02	.03	.04	.05	.06	.07	.08	.09
.0	.5000	.5040	.5080	.5120	.5160	.5199	.5239	.5279	.5319	.5359
.1	.5398	.5438	.5478	.5517	.5557	.5596	.5636	.5675	.5714	.5753
.2	.5793	.5832	.5871	.5910	.5948	.5987	.6026	.6064	.6103	.6141
.3	.6179	.6217	.6255	.6293	.6331	.6368	.6406	.6443	.6480	.6517
.4	.6554	.6591	.6628	.6664	.6700	.6736	.6772	.6808	.6844	.6879
.5	.6915	.6950	.6985	.7019	.7054	.7088	.7123	.7157	.7190	.7224
.6	.7257	.7291	.7324	.7357	.7389	.7422	.7454	.7486	.7517	.7549
.7	.7580	.7611	.7642	.7673	.7704	.7734	.7764	.7794	.7823	.7852
.8	.7881	.7910	.7939	.7967	.7995	.8023	.8051	.8078	.8106	.8133
.9	.8159	.8186	.8212	.8238	.8264	.8289	.8315	.8340	.8365	.8389
•••										
2.5	.9938	.9940	.9941	.9943	.9945	.9946	.9948	.9949	.9951	.9952
2.6	.9953	.9955	.9956	.9957	.9959	.9960	.9961	.9962	.9963	.9964
2.7	.9965	.9966	.9967	.9968	.9969	.9970	.9971	.9972	.9973	.9974
2.8	.9974	.9975	.9976	.9977	.9977	.9978	.9979	.9979	.9980	.9981
2.9	.9981	.9982	.9982	.9983	.9984	.9984	.9985	.9985	.9986	.9986
3.0	.9987	.9987	.9987	.9988	.9988	.9989	.9989	.9989	.9990	.9990
3.1	.9990	.9991	.9991	.9991	.9992	.9992	.9992	.9992	.9993	.9993
3.2	.9993	.9993	.9994	.9994	.9994	.9994	.9994	.9995	.9995	.9995
3.3	.9995	.9995	.9995	.9996	.9996	.9996	.9996	.9996	.9996	.9997
3.4	.9997	.9997	.9997	.9997	.9997	.9997	.9997	.9997	.9997	.9998

TABELA 5 – DISTRIBUIÇÃO NORMAL: $\Phi^{-1}(z)$

ε	.0005	.0010	.0050	.0100	.0200	.0250	.0500	.1000	.2000	.3000
z_ε	3.290	3.090	2.576	2.326	2.054	1.960	1.645	1.282	.842	.524
$z_{\varepsilon/2}$	3.481	3.290	2.807	2.576	2.326	2.241	1.960	1.645	1.282	1.036

$z_\varepsilon : P(Z > z_\varepsilon) = \varepsilon$; $z_{\varepsilon/2} : P(|Z| > z_{\varepsilon/2}) = \varepsilon$.

- **Exemplo 5.17 –** A resistência à compressão de amostras de cimento de um certo tipo é uma variável aleatória que pode ser modelada por uma distribuição normal com média 6000 kg/cm^2 e desvio padrão 100 kg/cm^2.

  a) Probabilidade para que uma amostra cimento tenha resistência superior a 6150 kg/cm^2:

  $$P(X > 6150) = 0.0668.$$

  b) Probabilidade de que uma amostra de cimento tenha resistência entre 5900 kg/cm^2 e 5950 kg/cm^2:

  $$P(5900 < X < 5950) = 0.1498.$$

  c) A resistência R que é excedida por 90% das amostras de cimento

  $P(X > R) = 0.90$ isto é $R = 5872$

Teorema 5.5 – Aditividade da normal

• Se as variáveis aleatórias X_i, $i=1,2,\dots,k$, são independentes então,

$$X_i \sim N(\mu_i,\sigma_i^2) \Rightarrow Y=\sum_{i=1}^{k}\alpha_i X_i \sim N\left(\mu_Y,\sigma_Y^2\right),$$

onde,

$$\mu_Y=\sum_{i=1}^{k}\alpha_i\mu_i \text{ e } \sigma_Y^2=\sum_{i=1}^{k}\alpha_i^2\sigma_i^2 .$$

***Dem.*:** Livro – Utiliza a fgm

Corolário 5.1 – Se as variáveis aleatórias X_i, $i=1,2,\dots,k$, são independentes e identicamente distribuídas então $X_i \sim N(\mu,\sigma^2) \Rightarrow Y=\sum_{i=1}^{k} X_i \sim N\left(k\mu, k\,\sigma^2\right)$

Corolário 5.2 – Se as variáveis aleatórias X_i, $i=1,2,\dots,k$, são independentes e identicamente distribuídas $X_i \sim N(\mu,\sigma^2) \Rightarrow \bar{X}=\frac{1}{k}\sum_{i=1}^{k} X_i \sim N\left(\mu,\frac{\sigma^2}{k}\right)$.

- A soma de v.a. **com distribuição conjuntamente normal** (as marginais têm distribuição normal e a conjunta tem distribuição normal multidimensional) tem distribuição normal **mesmo que as v.a. não sejam independentes (teorema 5.6)**.

$X_i \sim N(\mu_i, \sigma_i^2)$ $(i = 1, 2, \ldots, k)$ e fazendo $\sigma_{ij} = \operatorname{Cov}(X_i, X_j)$ $(i \neq j)$ e $\sigma_{ii} = \sigma_i^2$

então,

$$Y = \sum_{i=1}^{k} \alpha_i X_i \sim N\left(\mu_Y, \sigma_Y^2\right),$$

onde,

$$\mu_Y = \sum_{i=1}^{k} \alpha_i \mu_i \ ,$$

e,

$$\begin{aligned} \sigma_Y^2 = \alpha_1^2 \sigma_{11} + 2\alpha_1\alpha_2\sigma_{12} + 2\alpha_1\alpha_3\sigma_{13} + \cdots + 2\alpha_1\alpha_k\sigma_{1k} \\ + \alpha_2^2\sigma_{22} + 2\alpha_2\alpha_3\sigma_{23} + \cdots + 2\alpha_2\alpha_k\sigma_{2k} \\ \cdots \\ + \alpha_k^2\sigma_{kk} \ . \end{aligned}$$

6 – Distribuição exponencial

- A distribuição exponencial (ou exponencial negativa) tem a sua génese associada ao processo de Poisson, mas também é utilizada fora deste contexto;
- Se uma sucessão de eventos constitui um processo de Poisson de intensidade λ e se se inicia a contagem no instante 0, o **tempo de espera** pela chegada da primeira ocorrência é uma variável aleatória, com distribuição exponencial de parâmetro λ (dedução no livro).
- Diz-se que a v.a. X tem distribuição exponencial de parâmetro λ quando a sua função densidade é da forma,

$$f(x \mid \lambda) = \begin{cases} 0 & x \le 0, \\ \lambda e^{-\lambda x} & x > 0. \end{cases}$$

Simbolicamente, $X \sim \text{Ex}(\lambda)$.

- Função de distribuição: $F(x)=\begin{cases} 0 & (x\le 0), \\ 1-e^{-\lambda x} & (x>0), \end{cases}$
- Função geradora dos momentos: $M(s)=\left(1-\dfrac{s}{\lambda}\right)^{-1}=\dfrac{\lambda}{\lambda-s},\quad s<\lambda.$
- A partir da fgm vem $E(X)=\dfrac{1}{\lambda}$, $\mathrm{Var}(X)=\dfrac{1}{\lambda^2}$, $\mathrm{CV}=1$, $\gamma_1=2$, $\gamma_2=9$.
- Moda: **Não existe** (a função densidade é decrescente com x e o domínio é aberto).
- Mediana: $\mu_e=(\ln 2)/\lambda$. Note-se que $\mu_e<\mu$ (como seria de esperar numa distribuição com assimetria positiva)

Duas propriedades importantes:

- "Falta de memória": $X\sim \mathrm{Ex}(\lambda)\Rightarrow P(X>x+h\,|\,X>x)=P(X>h)$.
- $X_1, X_2, \ldots, X_k$ v.a. **independentes** então, $X_i\sim \mathrm{Ex}(\lambda)\Rightarrow Y=\min\limits_i X_i\sim \mathrm{Ex}(k\lambda)$.

Exemplo 5.20 (alterado) **–** Suponha-se que o tempo de vida útil de um dado componente é uma v.a. *X* com distribuição exponencial com média igual a 600 horas.

- Probabilidade de o componente durar mais de 700 horas

$$P(X > 700) = \int_{700}^{+\infty} \frac{1}{600} e^{-x/600} dx = e^{-7/6} \approx 0.31.$$

- Sabendo que o componente já durou 400 horas, qual a probabilidade de durar ainda mais 700 horas.

$$P(X > 1100 \mid X > 400) = \frac{P(X > 1100)}{P(X > 400)} = \frac{e^{-11/6}}{e^{-4/6}} = e^{-7/6}.$$

Dada a falta de memória da exponencial,

$P(X > 700) = P(X > 1100 \mid X > 400)$. Mais simples

- Num conjunto de 10 componentes a funcionar de forma independente qual a probabilidade de algum deles durar menos de 100 horas

$$P(\min X_i < 100) = \int_0^{100} \frac{1}{60} e^{-x/60} dx = 1 - e^{-100/60} \approx 0.8111$$

já que $\min X_i \sim \text{Ex}(1/60)$. Note-se que $P(X < 100) = 1 - e^{-1/6} \approx 0.1535$

7 – Distribuição gama. Distribuição do qui-quadrado

- Tal como para a exponencial, **a distribuição gama** também pode ser introduzida a partir do tempo de espera associado a um processo de Poisson**: Tempo (total) de espera pela *n*-ésima chegada.**

- Uma variável aleatória X com função densidade dada por,

$$f(x\,|\,\alpha,\lambda)=\frac{\lambda^{\alpha}e^{-\lambda x}x^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)},\qquad x>0,\ \alpha,\lambda>0,$$

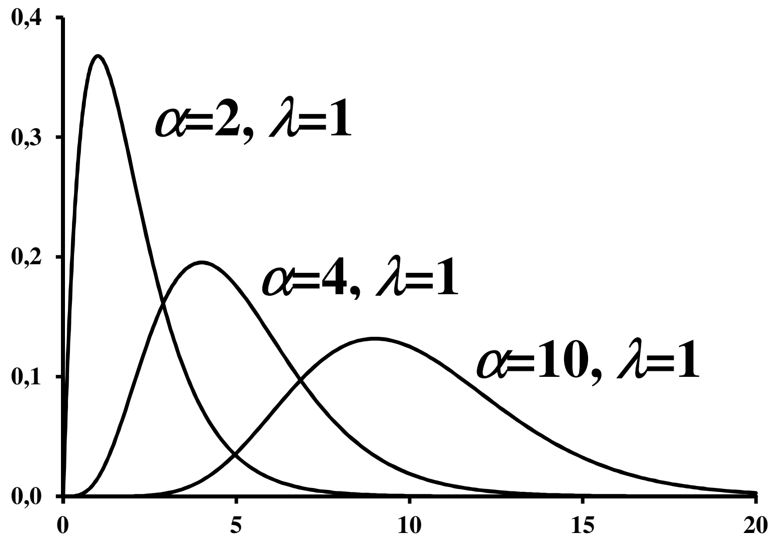
diz-se ter **distribuição gama** de parâmetros α e λ. Simbolicamente, $X\sim \mathrm{G}(\alpha,\lambda)$.

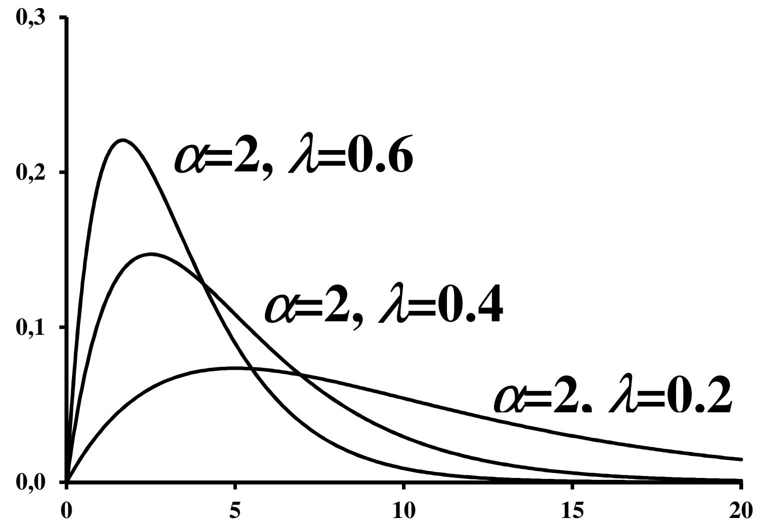
- Recordar a **função gama** ou factorial generalizado:

$$\Gamma(\alpha)=\int_0^{+\infty}e^{-x}x^{\alpha-1}dx\qquad(\alpha>0)$$

Propriedades:

- $\Gamma(\alpha)=(\alpha-1)\Gamma(\alpha-1),\quad \alpha>1.$ Se n inteiro, $\Gamma(n)=(n-1)!$
- $\Gamma(1)=1$ e $\Gamma(1/2)=\sqrt{\pi}$





Casos Particulares:

- Quando $\alpha = 1$, temos a distribuição exponencial.
- Se $\alpha = n/2$ e $\lambda = 1/2$ temos a dist. **Qui-quadrado**, i.e. $\chi^2(n) \equiv \mathrm{G}\left(\frac{n}{2};\frac{1}{2}\right)$.

Momentos e função geradora dos momentos

- Função geradora dos momentos $M(s)=\left(1-\dfrac{s}{\lambda}\right)^{-\alpha}=\left(\dfrac{\lambda}{\lambda-s}\right)^{\alpha}, \quad s<\lambda.$

- $E(X^k)=\dfrac{\alpha(\alpha+1)...(\alpha+k-1)}{\lambda^k}$ (cálculo directo ou utilização da f.g.m.).

$$E(X)=\mu=\frac{\alpha}{\lambda},\ \mathrm{Var}(X)=\sigma^2=\frac{\alpha}{\lambda^2},\ \mathrm{CV}=\frac{1}{\sqrt{\alpha}},\ \gamma_1=\frac{2}{\sqrt{\alpha}},\ \gamma_2=3+\frac{6}{\alpha}.$$

Parâmetros de ordem

- Moda: a distribuição gama não tem moda quando $\alpha \le 1$. Quando $\alpha>1$,

$$\mathrm{moda}(X)=\mu_*=(\alpha-1)/\lambda.$$

- Mediana: existe sempre, embora não se consiga explicitar analiticamente a sua expressão.

- Quando existem as três medidas de localização ($\alpha>1$), verifica-se a seguinte relação: $\mu_*<\mu_e<\mu$.

Aditividade da gama (obriga à independência e ao mesmo parâmetro λ)

- Sejam X_1 e X_2 duas variáveis aleatórias **independentes**. Então,

$$X_1 \sim \mathrm{G}(\alpha_1;\lambda),\ X_2 \sim \mathrm{G}(\alpha_2;\lambda) \Rightarrow X = X_1 + X_2 \sim \mathrm{G}(\alpha;\lambda),\ \alpha = \alpha_1 + \alpha_2.$$

- Este resultado pode ser generalizado para k v.a. **independentes**

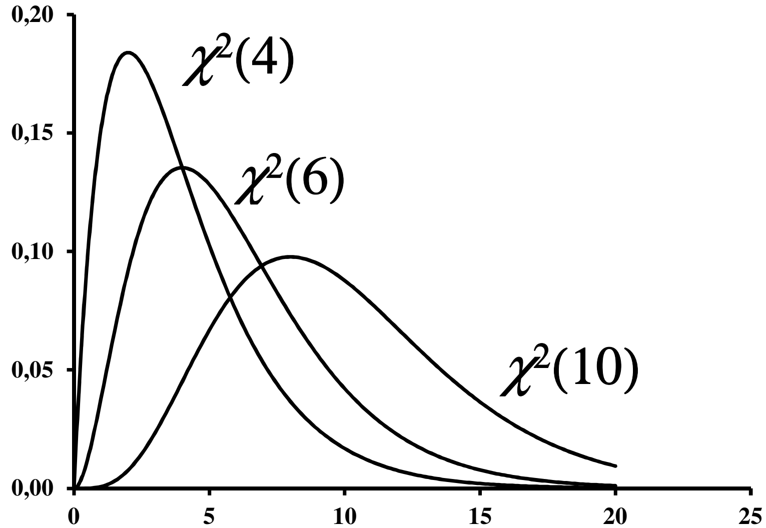
- A distribuição gama com $\alpha = n$ inteiro pode ser interpretada como a soma de α exponenciais independentes (teorema 5.5) e portanto, em termos do processo de Poisson podemos interpretar a Gama como o tempo de espera a distribuição do tempo de espera pelo n-ésimo evento.

Cálculo de probabilidades

- Não existe, em geral, solução analítica do integral correspondente à função de distribuição logo recorre-se ao computador
- A distribuição gama não se encontra tabelada. Para alguns casos particulares recorre-se à distribuição do qui-quadrado

Distribuição do qui-quadrado

- Diz-se que a v.a. X tem distribuição do qui-quadrado com n graus de liberdade (n inteiro positivo), simbolicamente $X \sim \chi^2(n)$, quando a respectiva função densidade é da forma, $f(x\,|\,n) = \dfrac{e^{-\frac{x}{2}} x^{\frac{n}{2}-1}}{2^{\frac{n}{2}}\Gamma(n/2)}, \quad x > 0, \quad n > 0$



A distribuição do qui-quadrado é uma distribuição gama com $\alpha = n/2$ e $\lambda = 1/2$,

$$X \sim \chi^2(n) \Leftrightarrow X \sim \mathrm{G}\left(\frac{n}{2};\frac{1}{2}\right).$$

Resultado importante

$$X \sim \mathrm{G}(n;\lambda) \Leftrightarrow Y = 2\lambda X \sim \chi^2(2n)$$

Como calcular probabilidades?

- Máquina de calcular ou computador
- Tabelas:

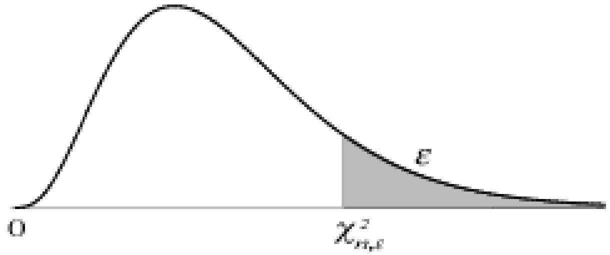
$X \sim \chi^2(n)$ A tabela permite encontrar o valor $\chi^2_{n,\varepsilon}$ tal que, $P(X > \chi^2_{n,\varepsilon}) = \varepsilon$, para alguns valores de ε e de n.

Para valores que não estão contemplados na tabela 6 $n > 100$, pode utilizar-se

$$X \sim \chi^2(n) \Rightarrow \sqrt{2X} - \sqrt{2n-1} \overset{a}{\sim} N(0,1)$$

TABELA 6 – DISTRIBUIÇÃO DO QUI-QUADRADO

$$\chi^2_{n.\varepsilon} : P(X > \chi^2_{n.\varepsilon}) = \varepsilon$$



n \ ε	.995	.990	.975	.950	.900	.750	.500	.250	.100	.050	.025	.010	.005	.001
1	.000	.000	.001	.004	.016	.102	.455	1.323	2.706	3.841	5.024	6.635	7.879	10.827
2	.010	.020	.051	.103	.211	.575	1.386	2.773	4.605	5.991	7.378	9.210	10.597	13.815
3	.072	.115	.216	.352	.584	1.213	2.366	4.108	6.251	7.815	9.348	11.345	12.838	16.266
4	.207	.297	.484	.711	1.064	1.923	3.357	5.385	7.779	9.488	11.143	13.277	14.860	18.466
5	.412	.554	.831	1.145	1.610	2.675	4.351	6.626	9.236	11.070	12.832	15.086	16.750	20.515
6	.676	.872	1.237	1.635	2.204	3.455	5.348	7.841	10.645	12.592	14.449	16.812	18.548	22.457
7	.989	1.239	1.690	2.167	2.833	4.255	6.346	9.037	12.017	14.067	16.013	18.475	20.278	24.321
8	1.344	1.647	2.180	2.733	3.490	5.071	7.344	10.219	13.362	15.507	17.535	20.090	21.955	26.124
9	1.735	2.088	2.700	3.325	4.168	5.899	8.343	11.389	14.684	16.919	19.023	21.666	23.589	27.877
10	2.156	2.558	3.247	3.940	4.865	6.737	9.342	12.549	15.987	18.307	20.483	23.209	25.188	29.588
…														
40	20.707	22.164	24.433	26.509	29.051	33.660	39.335	45.616	51.805	55.758	59.342	63.691	66.766	73.403
50	27.991	29.707	32.357	34.764	37.689	42.942	49.335	56.334	63.167	67.505	71.420	76.154	79.490	86.660
60	35.534	37.485	40.482	43.188	46.459	52.294	59.335	66.981	74.397	79.082	83.298	88.379	91.952	99.608
70	43.275	45.442	48.758	51.739	55.329	61.698	69.334	77.577	85.527	90.531	95.023	100.425	104.215	112.317
80	51.172	53.540	57.153	60.391	64.278	71.145	79.334	88.130	96.578	101.879	106.629	112.329	116.321	124.839
90	59.196	61.754	65.647	69.126	73.291	80.625	89.334	98.650	107.565	113.145	118.136	124.116	128.299	137.208
100	67.328	70.065	74.222	77.929	82.358	90.133	99.334	109.141	118.498	124.342	129.561	135.807	140.170	149.449

- **Exemplo 5.24 –** Em relação ao exemplo 5.22 (ver livro) note-se que,

$$X \sim \mathrm{G}(2;0.008) \Leftrightarrow Y = 0.016X \sim \chi^2(4),$$

donde,

$$P(X > 500) = P(Y > 0.016 \times 500) = P(Y > 8) \approx 0.10,$$

A tabela refere que para 7.77944 a probabilidade seria 0.10 e que para 9.48773 esta seria de 0.05. Escolhe-se o mais próximo ou procede-se a uma interpolação linear. Valor em computador: 0.0916

- **Momentos** e **f.g. dos momentos** (tiram-se dos momentos da gama):

$$E(X) = n,\ \mathrm{Var}(X) = 2n,\ \mathrm{CV} = \sqrt{\frac{2}{n}},\ \gamma_1 = \sqrt{\frac{8}{n}},\ \gamma_2 = 3 + \frac{12}{n},$$

quando $n \to \infty$ os momentos aproximam-se dos momentos da normal

f.g.m. $\rightarrow M(s) = (1-2s)^{-\frac{n}{2}}, \quad s < \frac{1}{2}$ (obtém-se da f.g.m. da gama)

Aditividade da qui-quadrado (obriga à **independência**)

X_1 e X_2 duas v.a. independentes. Então,

$$X_1 \sim \chi^2(n_1),\ X_2 \sim \chi^2(n_2) \Rightarrow X = X_1 + X_2 \sim \chi^2(n),\ n = n_1 + n_2.$$

- Pode generalizar-se par k v.a. independentes

***Dem*.:** imediata pela fgm ou particularizando o caso da gama.

Relação entre a normal e a qui-quadrado (ver livro)

- Caso 1: $X \sim N(0,1) \Rightarrow Y = X^2 \sim \chi^2(1)$.
- Caso 2: $X_i \sim N(0,1) \Rightarrow \sum_{i=1}^{n} X_i^2 \sim \chi^2(n)$ se $X_i,\ i = 1,2,\ldots,n$, independentes.
- Caso 3: $X_i \sim N(\mu_i, \sigma_i^2) \Rightarrow \sum_{i=1}^{n} \left(\dfrac{X_i - \mu_i}{\sigma_i} \right)^2 \sim \chi^2(n)$

  se $X_i,\ i = 1,2,\ldots,n$, independentes.

8 – Teorema do limite central

- O T.L.C é um dos **resultados mais importantes** da teoria da probabilidade.
- Introduz-se a noção de distribuição **assintótica**
- O principal instrumento que vai aplicar-se na determinação de distribuições assintóticas é o conhecido **teorema da continuidade**:

Teorema 5.12 – (Teorema da continuidade) Considere-se a sucessão de variáveis aleatórias,

$$\{X_1,\ \ X_1+X_2,\ \ldots,\ \ X_1+X_2+\cdots+X_n,\ldots\},\ \text{ ou }\ \{\textstyle\sum_{i=1}^n X_i\,,\ n=1,2,\ldots\}.$$

Sejam $\{F_n\}$ e $\{M_n\}$ $(n=1,2,\ldots)$ as respectivas sucessões de funções de distribuição e de funções geradoras dos momentos [supõe-se que existem para $|\,s\,|<s_0$ $(s_0>0)$]. Então, se $M_n(s)\to M(s)$ $(s>0)$ e $M_n(0)\to 1$, a sucessão $\{F_n\}$ tende para uma função de distribuição F que tem M como função geradora dos momentos.

Teorema 5.13 [Teorema do limite central (Lindberg-Levy)] – Dada a sucessão de variáveis aleatórias *iid*, $X_1, X_2, \ldots, X_n, \ldots$, com média μ e variância σ^2, então, quando $n \to +\infty$, a função de distribuição da variável aleatória,

$$Z_n = \frac{\sum_{i=1}^{n} X_i - n\mu}{\sigma\sqrt{n}},$$

tende para uma função de distribuição $N(0,1)$, ou seja, a distribuição assintótica de Z_n é a $N(0,1)$. Simbolicamente, $Z_n \overset{a}{\sim} N(0,1)$.

***Dem.*:** versão simplificada no livro

Interpretação prática do TLC

A conclusão do teorema anterior pode exprimir-se na forma alternativa,

- $$\lim_{n\to+\infty} P(Z_n \le x) = \lim_{n\to+\infty} P\left(\frac{\sum_{i=1}^{n} X_i - n\mu}{\sqrt{n}\,\sigma} \le x\right) = \Phi(x), \text{ ou}$$

se n “grande”:

- $$P(Z_n \le x) = P\left(\frac{\sum_{i=1}^{n} X_i - n\mu}{\sqrt{n}\,\sigma} \le x\right) \approx \Phi(x) \quad (n \text{ grande}).$$

Basta exigir a existência de μ e σ^2. Distribuição de X_i pode ser discreta ou contínua.

O que é n grande? Depende... da distribuição de X_i.

- Distribuições simétricas e unimodais tornam a convergência mais rápida e melhoram a aproximação;
- Aconselhável no mínimo $n \geq 30$, salvo nalguns casos muito especiais (c/ aplicação prática). Para certas distribuições ter-se-ão de observar valores de n muito mais elevados.
- Alguns cuidados quando a distribuição de X_i é discreta: Correcção de continuidade.

Exemplo 5.27 – A procura diária a satisfazer (unidade: 100 Kg) é uma v.a. X com média 40 e variância 25. Sendo a produção anual planeada é de 11500, calcular a probabilidade de haver procura anual excedentária (ano: 289 dias úteis).

Seja X_i: procura no dia i, $E(X_i) = \mu = 40$ e $\mathrm{Var}(X_i) = \sigma^2 = 25$. $X_i \sim F(x) = ?$

$$P\left(\sum_{i=1}^{289} X_i > 11\,500\right) = P\left(\frac{\sum_{i=1}^{289} X_i - n\mu}{\sigma\sqrt{n}} > \frac{11\,500 - 289\times 40}{5\sqrt{289}}\right) \approx 1 - \Phi(-0.71) = 0.7611.$$

Exemplo 5.28 – Do exemplo anterior pretende determinar-se a produção Q que deve ser planeada de modo a cobrir a procura anual com probabilidade 0.99.

$$P\left(\sum_{i=1}^{289} X_i < Q\right) = P\left(\frac{\sum_{i=1}^{289} X_i - n\mu}{\sigma\sqrt{n}} < \frac{Q - 289\times 40}{5\sqrt{289}}\right) \approx \Phi\left(\frac{Q - 11\,560}{85}\right) = 0.99$$

$$\Rightarrow \frac{Q - 11\,560}{85} = 2.327 \Rightarrow Q = 11\,758\ (\times 10^2\ \text{kg})$$

T. Limite Central: Aplicação a aproximações para distribuições discretas

Corolário 5.3 (T. de De Moivre-Laplace) – Dada a sucessão de variáveis aleatórias iid, $X_1, X_2, ..., X_n, ...$, com distribuição de Bernoulli de média $E(X_i) = \theta$ e, portanto, $\mathrm{Var}(X_i) = \theta(1-\theta)$, tem-se,

$$\frac{\sum_{i=1}^{n} X_i - n\theta}{\sqrt{n\theta(1-\theta)}} \overset{a}{\sim} N(0,1).$$

Nota: $X = \sum_{i=1}^{n} X_i \sim B(n;\theta)$. Quando n é grande, utilizar o corolário. Mas...

com Correcção de Continuidade.

$X \sim B(n;\theta)$ (n grande) $P(a \le X \le b) = ?$, a e b inteiros, $0 \le a < b \le n$.

- Resposta exacta: $P(a \le X \le b) = \sum_{x=a}^{b} \binom{n}{x} \theta^x (1-\theta)^{n-x}$
- Resposta aproximada: $P(a \le X \le b) \approx \Phi\left(\dfrac{b-n\theta}{\sqrt{n\theta(1-\theta)}}\right) - \Phi\left(\dfrac{a-n\theta}{\sqrt{n\theta(1-\theta)}}\right)$,

pois $\dfrac{X-n\theta}{\sqrt{n\theta(1-\theta)}} \overset{a}{\sim} N(0,1)$,

Correcção de continuidade

$$P(a \le X \le b) \approx \Phi\left(\frac{b+\frac{1}{2}-n\theta}{\sqrt{n\theta(1-\theta)}}\right) - \Phi\left(\frac{a-\frac{1}{2}-n\theta}{\sqrt{n\theta(1-\theta)}}\right).$$

A **correcção de continuidade aplica-se sempre quando se aproxima uma distribuição discreta por uma distribuição contínua**.

Cálculo de probabilidades com a binomial (regra prática):

- Sempre que possível utilizar directamente a distribuição binomial.
- Quando necessário o cálculo aproximado das probabilidades deve atender aos seguintes casos:
  - Se $0.1 < \theta < 0.9 \rightarrow$ (ou $n\theta \geq 5$) aproximar pela normal, utilizando a correcção de continuidade.
  - Se $\theta \leq 0.1 \rightarrow$ aproximar pela Poisson.
  - Se $\theta \geq 0.9 \rightarrow$ aproximar pela Poisson, considerando o respectivo acontecimento complementar.

Exemplo 5.30 – Seja $X \sim B(200;0.5)$. Calcular $P(95 \leq X \leq 105)$

Valor "exacto" : $\sum_{x=95}^{105} \binom{200}{x} (0.5)^x (0.5)^{200-x} = 0.563246$

Sem correcção de continuidade: 0.520498
Com correcção de continuidade: 0.563316

Corolário 5.4 – Se X é uma variável com distribuição de Poisson, $X \sim \text{Po}(\lambda)$, então,

$$\lim_{\lambda \to +\infty} P\left(\frac{X - \lambda}{\sqrt{\lambda}} \le x \right) = \Phi(x).$$

***Dem*.:** Livro

Efectuar a correcção de continuidade.

Exemplo 5.33 – Suponha-se que $X \sim \text{Po}(20)$. Calcular $P(16 < X < 22)$

Valor "exacto": 0.4226

Valor aproximado (com correcção): 0.4142

9 - Distribuição Normal bidimensional

Definição 5.16 – Distribuição normal bidimensional

Se a variável aleatória bidimensional, (X,Y), tem função densidade da forma,

$$f(x,y\,|\,\mu_X,\mu_Y,\sigma_X^2,\sigma_Y^2,\rho)=\frac{1}{2\pi\sigma_X\,\sigma_Y\sqrt{1-\rho^2}}\times$$

$$\times\exp\left\{-\frac{1}{2(1-\rho^2)}\left[\left(\frac{x-\mu_X}{\sigma_X}\right)^2-2\rho\left(\frac{x-\mu_X}{\sigma_X}\right)\left(\frac{y-\mu_Y}{\sigma_Y}\right)+\left(\frac{y-\mu_Y}{\sigma_Y}\right)^2\right]\right\},$$

com $-\infty<x<+\infty$, $-\infty<y<+\infty$ e

$$-\infty<\mu_X<+\infty,\ -\infty<\mu_Y<+\infty,\ \sigma_X^2>0,\ \sigma_Y^2>0,\ -1\le\rho\le1,$$

diz-se que tem distribuição normal bidimensional.

Pode demonstrar-se [Murteira e Antunes (2012a)] que,

- $\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty} f(x, y)\, dx\, dy = 1$,
- $E(X) = \mu_X$, $E(Y) = \mu_Y$,
- $\mathrm{Var}(X) = \sigma_X^2$, $\mathrm{Var(Y)} = \sigma_X^2$,
- $\mathrm{Cov}(X, Y) = \rho\,\sigma_X\ \sigma_Y$ (ρ é o coeficiente de correlação).

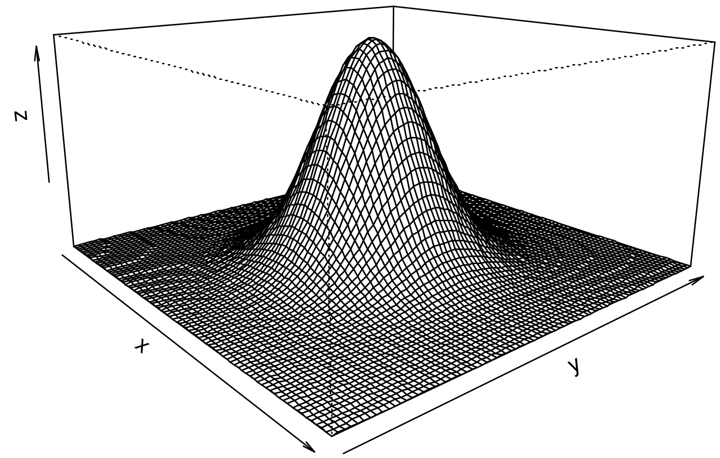
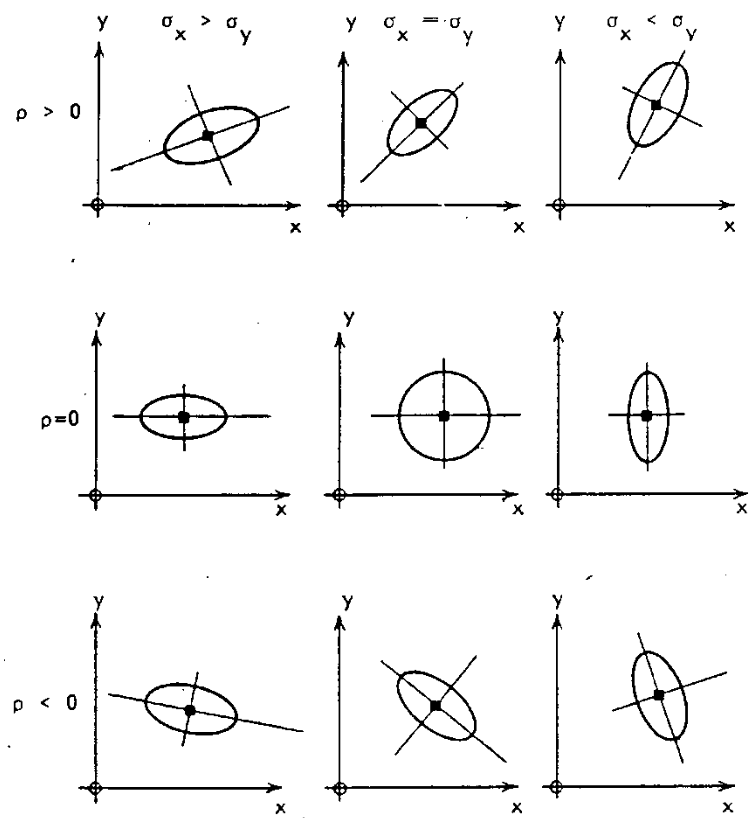
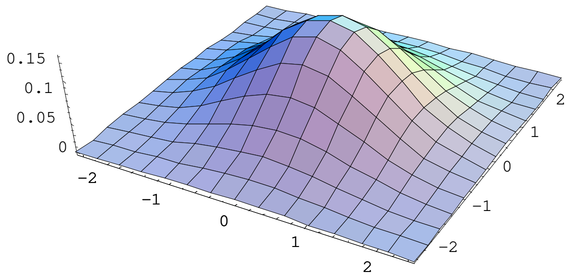


Fig. 5.20 – Função densidade da distribuição normal bidimensional

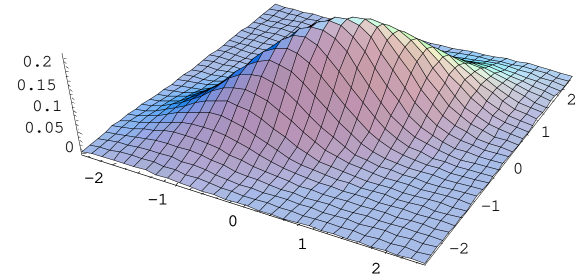
A figura pode ser completada estudando as curvas de nível da função densidade, isto é, as intersecções da superfície $z = f(x, y)$ com planos paralelos ao plano $x0y$ e respectivas projecções neste plano (elipses de contorno).



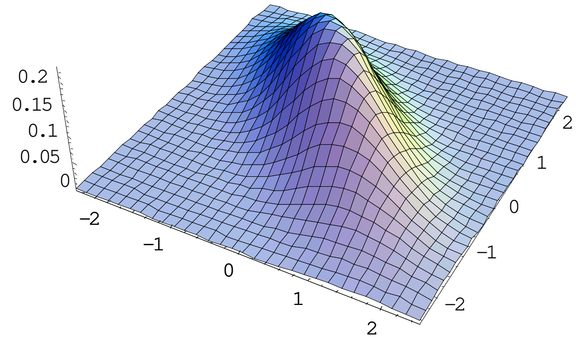
σx > σy
σx = σy
σx < σy
ρ > 0
ρ=0
ρ < 0
y
x



$\rho = 0$ **(Covariância nula)**



$\rho > 0$ **(Covariância positiva)**



$\rho = 0$ **(Covariância negativa)**

Caso particular: **Distribuição normal bidimensional estandardizada** ($\mu_X = \mu_Y = 0$ e $\sigma_X^2 = \sigma_Y^2 = 1$):

$$f(x,y) = \frac{1}{2\pi\sqrt{1-\rho^2}} \exp\left\{ -\frac{1}{2(1-\rho^2)}(x^2 - 2\rho xy + y^2) \right\}.$$

Funções densidade marginais:

$$f_1(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma_X^2}} \exp\left\{ -\frac{1}{2\sigma_X^2}(x-\mu_X)^2 \right\},$$

$$f_2(y) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma_Y^2}} \exp\left\{ -\frac{1}{2\sigma_Y^2}(y-\mu_Y)^2 \right\}.$$

Teorema 5.14 – Se (X, Y) é uma variável aleatória normal bidimensional então X e Y são independentes se e só se X e Y forem não correlacionadas $(\rho = 0)$.

Dem: Ver livro

- Funções densidade condicionadas (continuam a ser distribuições normais):

$$X \mid Y = y \sim N(\mu_X + \rho \frac{\sigma_X}{\sigma_Y}(y - \mu_Y);\ \sigma_X^2(1-\rho^2))$$

$$f_{X|Y=y}(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma_X^2(1-\rho^2)}} \times \exp\left\{ -\frac{1}{2\sigma_X^2(1-\rho^2)} \left[x - \left(\mu_X + \rho \frac{\sigma_X}{\sigma_Y}(y - \mu_Y) \right) \right]^2 \right\}$$

$$X \mid Y = y \sim N(\mu_Y + \rho \frac{\sigma_Y}{\sigma_X}(x - \mu_X);\ \sigma_Y^2(1-\rho^2))$$

$$f_{Y|X=x}(y) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma_Y^2(1-\rho^2)}} \times \exp\left\{ -\frac{1}{2\sigma_Y^2(1-\rho^2)} \left[y - \left(\mu_Y + \rho \frac{\sigma_Y}{\sigma_X}(x - \mu_X) \right) \right]^2 \right\}$$

Valores esperados e variâncias condicionados

$$\mu(y) = E(X \mid Y = y) = \mu_X + \rho \frac{\sigma_X}{\sigma_Y}(y - \mu_Y),$$

$$\sigma^2(y) = \mathrm{Var}(X \mid Y = y) = \sigma_X^2 (1 - \rho^2).$$

$$\mu(x) = E(Y \mid X = x) = \mu_Y + \rho \frac{\sigma_Y}{\sigma_X}(x - \mu_X),$$

$$\sigma^2(x) = \mathrm{Var}(Y \mid X = x) = \sigma_Y^2 (1 - \rho^2),$$

- Observações:
  1. O valor esperado condicionado de X é uma função linear de y.
  2. A variância de X condicionada por $Y = y$ não depende de y e é menor do que a variância de X (sem ser condicionada). Esta redução será tanto maior quanto mais correlacionadas forem as variáveis X e Y.